Interpolation d'un nuage de points par des cubiques.

I / Problème

Soit $M_i\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ avec i compris entre 1 et n, n points ordonnés du plan.

On cherche à interpoler ce nuage de point par une courbe « lisse ».
Deux cas sont à distinguer :

- On veut une courbe ouverte, c'est-à-dire, pas de raccordement entre le premier point et le dernier point (M_i et M_n).
- On veut une courbe fermée, c'est-à-dire un raccordement entre le premier point et le dernier point (M_i et M_n).

II / Résolution

II.1 / Choix de la courbe d'interpolation

Soit $P_i(t) = \begin{cases} x(t) = a_0^i + a_1^i \cdot t + a_2^i \cdot t^2 + a_3^i \cdot t^3 \\ y(t) = b_0^i + b_1^i \cdot t + b_2^i \cdot t^2 + b_3^i \cdot t^3 \end{cases}$ avec i compris entre 1 et n-1 (pas de raccordement entre le premier et le dernier point), ou i compris entre 1 et n (raccordement du premier et du dernier point). t est compris entre 0 et 1.

II.2 / Calcul du « vecteur tangent »

Soit $V_i\begin{pmatrix} V_{ix} \\ V_{iy} \end{pmatrix}$ (i compris entre i et n) le vecteur de tangence de $P_i(t)$ au point M_i.

Alors, on choisit (c'est arbitraire):
Si on ne veut pas de raccordement entre le premier et le dernier point, alors,

$$\begin{cases} Si\ i = 1: & \vec{V_1} = \overrightarrow{M_1 M_2} \\ Si\ i = n: & \vec{V_n} = \overrightarrow{M_{n-1} M_n} \\ Sinon: & \vec{V_i} = \overrightarrow{M_{i-1} M_{n+1}} \end{cases}$$

Si au contraire, on veut une courbe fermée, alors

$$\begin{cases} Si\ i = 1: & \vec{V_1} = \overrightarrow{M_n M_2} \\ Si\ i = n: & \vec{V_n} = \overrightarrow{M_{n-1} M_1} \\ Sinon: & \vec{V_i} = \overrightarrow{M_{i-1} M_{n+1}} \end{cases}$$

II.3 / Conditions de raccordement à remplir

Pour i compris entre 1 et n-1 (cas d'une courbe ouverte) et i compris entre 1 et n (cas d'une courbe fermée), il faut vérifier :

$P_i(0) = M_i$

$P_i(1) = M_{i+1}$

$P_i'(0) = \overrightarrow{V_i}$

$P_i'(1) = \overrightarrow{V_{i+1}}$

II.4 / Calcul des coefficients

De ces 4 équations vectorielles représentant 8 équations scalaires, on en tire:

$a_0^i = x_i$

$b_0^i = y_i$

$a_1^i = V_{ix}$

$b_1^i = V_{iy}$

$a_3^i = V_{ix+1} + V_{ix} - 2.x_{i+1} + 2.x_i$

$b_3^i = V_{iy+1} + V_{iy} - 2.y_{i+1} + 2.y_i$

$a_2^i = V_{ix} + x_{i+1} - x_i - a_3^i$

$b_2^i = V_{iy} + y_{i+1} - y_i - b_3^i$

La courbe d'interpolation est donc entièrement définie.

III / Tracé de la courbe

Pour tracer cette courbe, il suffit de raccorder des points calculés en faisant varier le paramètre t entre 0 et 1 et ceci, pour i variant de 1 à n-1 ou n suivant si on veut le raccord entre le premier point et le dernier.

Les points calculés sont alors simplement raccordés par des segments. Le nouveau problème qui se pose est de savoir quel pas (la variation de t) choisir pour ne pas avoir trop de calculs à faire, mais avoir une qualité de dessin suffisante.

La solution consiste à calculer le rayon de courbure minimal de chaque cubique sur le domaine considéré (t compris entre 0 et 1).