FONCTIONS SPÉCIALES

I/ FONCTION GAMMA (fonction eulérienne de 2^{e} espèce).

1/ Définition.

La façon la plus simple d'introduire la fonction Gamma, notée Γ(x), est de la définir par la formule d'Euler :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

On remarque que cette intégrale peut s'interpréter comme la transformée de Laplace de t^{x-1} pour f=1. Or on a démontré l'existence de la transformée de Laplace de t^{a} pour a>-1 et f>0. Par conséquent la formule d'Euler ne définit Γ(x) que pour x-1>-1 soit x>0.

2/ Caractéristiques.

On peut montrer que la convergence de la formule d'Euler pour x>0 est uniforme. Par conséquent Γ(x) est une fonction continue pour x>0.
On peut montrer également que les dérivées successives par rapport à x de la formule d'Euler convergent uniformément pour x>0. Elles sont donc égales aux dérivées successives de Γ(x) :

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{x-1}\right) e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{x-1} \ln(t) e^{-t} dt$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1} (\ln(t))^2 e^{-t} dt \text{ ,et plus généralement :}$$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} (\ln(t))^n e^{-t} dt$$

On remarque que Γ(x) et Γ"(x) sont des fonctions positives pour x>0 car la fonction intégrée est positive.
Γ(x) est donc une fonction à valeurs positives et de courbure positive pour x>0.

$$\text{De plus, } \forall t > 1, t^{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \text{ et donc } \Gamma(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$$\text{et, } \Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \text{ qui diverge, donc } \Gamma(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

La courbure étant uniforme, il y a donc un minimum et un seul de Γ(x) pour x>0.

3/ Propriété fondamentale.

Intégrons par parties la formule d'Euler :
On pose $u=e^{-t}$ et $dv=t^{x-1}dt$, d'où :

$$\Gamma(x) = \left[e^{-t} \cdot \frac{t^x}{x} \right]_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty \frac{t^x}{x} \cdot e^{-t} dt}_{\frac{\Gamma(x+1)}{x}}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

C'est la relation de récurrence de la fonction Γ(x). Elle permet de calculer Γ(x) pour x>0 quelconque si on connaît Γ(x) pour x variant dans un intervalle de longueur 1 (par exemple x∈[1,2]).
Mais cette relation de récurrence va permettre de définir Γ(x) pour les valeurs négatives de x.

4/ Prolongement de Γ(x) pour x négatif.

Supposons -1<x<0 soit 0<x+1<1 : Γ(x+1) est bien définie par la formule d'Euler, mais pas Γ(x). On convient alors de définir Γ(x) par la relation $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, et on étend le procédé de proche en proche.

Ainsi pour -(n+1)<x<-n (n entier positif ou nul), on aura : $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\ldots(x+n)}(0<x+n+1<1)$

Pour x=0, Γ(x) est infinie : il en sera de même pour toutes les valeurs entières négatives de x, c'est à dire que Γ(-1), Γ(-2), ..., Γ(-n), ... sont infinies.

5/ Valeurs particulières de Γ(x).

a/ $\Gamma(1)=\int_0^1 e^{-t}dt=1$

b/ Pour x=n∈N*.

On applique la formule de récurrence :

Γ(n) = (n-1)Γ(n-1) = (n-1)(n-2)Γ(n-2) = (n-1)(n-2)(n-3).....3.2.1.Γ(1)

$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

Voilà pourquoi la fonction Gamma s'appelle aussi fonction factorielle généralisée.

c/ Pour x=1/2

Dans la formule d'Euler, faisons le changement de variable t=u², dt=2u.du.

$$\text{On obtient}:\Gamma(x)=2.\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du$$

$$\text{D'où}:\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du \quad \text{car } u\mapsto e^{-u^2} \text{ est une fonction paire.}$$

On obtient la valeur classique : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

d/ Pour x=n+1/2 (n entier positif)

Γ(n+1/2)=(n-1)Γ(n-1/2)=(n-1/2)(n-3/2).....3/2.1/2.Γ(1/2)= $\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$

Γ(n+1/2)=

$$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots3\cdot1}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{2n\cdot(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi} \quad (n\in\mathbb{N})$$

6/ Graphe de Γ(x).

Dans l'intervalle]0,+∞[, l'abscisse et l'ordonnée du minimum sont x_{min}≈1,465 et Γ(x_{min})≈0,8856. Cette dernière valeur est évidemment proche de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\approx 0{,}8862$.